

文章编号:1000-8055(2012)06-1225-05

自适应增量 Kalman 滤波方法

傅惠民, 吴云章, 娄泰山

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 提出自适应增量 Kalman 滤波(AIKF)的概念和定义,建立自适应增量 Kalman 滤波模型及其分析方法,给出主要的计算步骤.传统自适应 Kalman 滤波(AKF)方法能够对事先未知的系统噪声和量测噪声的统计量进行有效的估计.但是,传统自适应 Kalman 滤波方法也无法对由于环境因素(如深空探测)的影响、测量设备的不稳定性等原因产生的未知时变测量系统误差进行补偿和校正,从而产生较大的滤波误差,甚至导致发散.提出的自适应增量 Kalman 滤波方法不但能够对系统噪声和量测噪声的统计量进行估计,而且还能成功消除这种测量系统误差,有效地提高滤波精度.该方法计算简单,便于工程应用.

关 键 词: 自适应 Kalman 滤波; 自适应增量滤波; 系统误差; 滤波精度; 深空探测

中图分类号: V448; O231

文献标志码: A

Adaptive incremental Kalman filter method

FU Hui-min, WU Yun-zhang, LOU Tai-shan

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: An adaptive incremental Kalman filter (AIKF) method was proposed, of which the concept, model, basic equations and key calculative steps were given. Classical adaptive Kalman filter(AKF)method can effectively estimate the prior knowledge on the statistical characteristics of state noise and measurement noise. Classical AKF method cannot compensate and correct the unknown time-varying system errors that due to environmental factors and the instability of measurement equipments in actual engineering (such as deep space exploration), which produced considerable filter errors and even led to diverge. The presented adaptive incremental Kalman filter method can estimate statistical characteristics of state noise and measurement noise, and also can successfully eliminate these measurement equation's system errors. The method can greatly improve the accuracy of incremental Kalman filter. The method is simple to calculate and easy to apply in engineering.

Key words: adaptive Kalman filter; adaptive incremental filter; system error; filtering accuracy; deep space exploration

在导航领域的运动定位系统中, Kalman 滤波利用系统的数学模型通过递推估计运动状态^[1]. 它不但要求精确的系统状态方程和量测方

程,而且要求状态噪声和量测噪声的统计量是已知的. 然而,在许多复杂环境(特别是深空探测)中,很难准确地获得噪声的统计量,从而在滤波中

收稿日期:2012-02-12

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120704.1152.201206.1225_004.html

基金项目:国家重点基础研究发展计划(2012CB720000)

作者简介:傅惠民(1956—),男,浙江遂昌人,“长江学者”特聘教授,博士,从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法、可靠性及滤波理论研究.

引入不准确的因素^[2-3],这可能会导致滤波发散^[4].有时即使开始模型选择的比较符合实际,但在运行过程中,模型存在摄动.在这种情况下,首先要估计变化了的噪声统计量,进而调整滤波增益矩阵^[5-6].自适应 Kalman 滤波(AKF)能够很好地解决上述问题^[6-10].但是,在工程实际中,由于环境因素的影响、测量设备的不稳定性、模型和参数的选取不当等原因往往带来未知时变的系统误差.自适应 Kalman 滤波方法无法很好地对这种测量系统误差进行补偿和修正,结果产生较大的滤波误差,甚至导致发散.文献[11]提出一种增量 Kalman 滤波方法,它能够成功消除未知的系统误差,提高了滤波精度;文献[12]将这一方法推广到了非线性情况.本文进一步提出一种自适应增量 Kalman 滤波(AIKF)方法,它既能够成功消除测量数据中的系统误差,又能够对系统噪声和量测噪声的统计量进行实时估计,从而有效地提高滤波精度.

1 基本方程

设增量 Kalman 滤波中的状态方程和量测方程分别为^[11]

$$X_k = \Phi_{k/k-1} X_{k-1} + W_{k-1} \quad (1)$$

$$\Delta Z_k = H_k X_k - H_{k-1} X_{k-1} + V_k \quad (2)$$

式中, X_k 为 t_k 时刻的状态向量 ($k=1, 2, \dots$); $\Phi_{k/k-1}$ 为状态转移矩阵,下标 $k/k-1$ 表示第 $k-1$ 步到第 k 步; W_k 为系统噪声向量; ΔZ_k 为量测向量增量, $\Delta Z_k = Z_k - Z_{k-1}$, Z_k 为量测向量; H_k 为量测矩阵; V_k 为量测噪声向量.并设系统噪声向量 W_k 和量测噪声向量 V_k 满足下式

$$\begin{cases} E[W_k] = q_k \\ \text{Cov}[W_k, W_j] = E[W_k W_j^T] = Q_k \delta_{kj} \\ E[V_k] = r_k \\ \text{Cov}[V_k, V_j] = E[V_k V_j^T] = R_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}[W_k, V_j] = E[W_k V_j^T] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 Cov 为协方差符号, E 为数学期望符号, δ_{kj} 为 δ 函数,当 $k=j$ 时, $\delta_{kj}=1$; 当 $k \neq j$ 时, $\delta_{kj}=0$.

由于工程实际中相邻两个量测向量 Z_k 和 Z_{k-1} 的测量系统误差大小比较接近,所以 ΔZ_k 的系统误差为相对小量,可以忽略不计^[11].此外,根据独立增量随机过程原理可知, ΔZ_k 与 ΔZ_{k-1} 之间比 Z_k 与 Z_{k-1} 更能满足式(3)的独立性要求^[13].

2 自适应增量滤波方法

设状态向量 X_k 满足式(1),量测向量增量 ΔZ_k

满足式(2),系统噪声向量 W_k 和量测噪声向量 V_k

满足式(3).则 t_k 时刻的状态向量 X_k 的估计 $\hat{X}_k$ 可按下面步骤递推得到.

状态一步预测

$$\hat{X}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \hat{X}_{k-1} + q_{k-1} \quad (4)$$

一步预测误差的方差阵

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + Q_{k-1} \quad (5)$$

状态估计

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (\Delta Z_k - \Delta \hat{Z}_{k/k-1}) \quad (6)$$

估计误差的方差阵

$$P_k = P_{k/k-1} - K_k \Omega_k K_k^T \quad (7)$$

滤波增益矩阵

$$K_k = (P_{k/k-1} H_k^T - \Phi_{k/k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T) \Omega_k^{-1} \quad (8)$$

式中

$$\Delta \hat{Z}_{k/k-1} = H_k \hat{X}_{k/k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1} + r_k \quad (9)$$

$$\Omega_k = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k - H_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T -$$

$$H_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T + H_{k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T \quad (10)$$

2.1 自适应增量算法

在许多实际环境中,系统噪声的均值 q_k 、协方差 Q_k 和量测噪声的均值 r_k 、协方差 R_k 是未知的,因此必须利用先前的量测信息对 q_k 、 Q_k 、 r_k 和 R_k 进行预测估计,可由极大后验(maximum a posterior, MAP)给出噪声统计估值器.

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_{j/k} - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1/k}) \quad (11)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_{j/k} - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1/k} - \hat{q}_k) (\hat{X}_{j/k} - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1/k} - \hat{q}_k)^T \quad (12)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/k} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1/k})] \quad (13)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/k} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1/k}) - \hat{r}_k] [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/k} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1/k}) - \hat{r}_k]^T \quad (14)$$

式中, $\hat{X}_{j/k}$ ($j=0, 1, \dots, k$) 为区间内的平滑估计值,计算过程较为复杂,并且在进行第 k 步滤波时,由于 $\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_k$ 本身为待估计量,所以尚不能根据式(13)和式(14)计算 $\hat{r}_k$ 和 $\hat{R}_k$,在式(9)和式(10)只能采用前一步的 $\hat{r}_{k-1}$ 和 $\hat{R}_{k-1}$ 代替 $\hat{r}_k$ 和 $\hat{R}_k$.下面再给出一种较为便捷的次优估计方法.

2.2 次优自适应增量算法

在上面四式中以估计值 $\hat{X}_j = \hat{X}_{j/j}$ 和预测值 $\hat{X}_{j/j-1}$ 代替计算复杂的平滑估计值 $\hat{X}_{j/k}$ 可得次优 MAP 估值器

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_j - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1}) \quad (15)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_j - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1} - \hat{q}_k) (\hat{X}_j - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1} - \hat{q}_k)^T \quad (16)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/j-1} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1})] \quad (17)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/j-1} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1}) - \hat{r}_k] [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/j-1} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1}) - \hat{r}_k]^T \quad (18)$$

2.3 次优无偏自适应增量算法

由于式(12)和式(14)给出的估计量 $\hat{Q}_k$ 和 $\hat{R}_k$ 是有偏的,计算中难免带来误差,所以下面进一步研究 $\hat{Q}_k$ 和 $\hat{R}_k$ 的无偏估计值。设新息 $\varepsilon_k = \Delta Z_k - \hat{\Delta Z}_{k/k-1}$, 则有

$$E[\varepsilon_k] = 0 \quad (19)$$

$$E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k - H_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T - H_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T + H_{k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T = \Omega_k \quad (20)$$

根据式(4)~式(10)有

$$E[\hat{q}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[K_j \varepsilon_j + q_j] = q_k \quad (21)$$

$$E[\hat{r}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\varepsilon_j + r_j] = r_k \quad (22)$$

因而均值估值器 $\hat{q}_k$ 和 $\hat{r}_k$ 是无偏的. 又由于

$$E[\hat{R}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\varepsilon_j \varepsilon_j^T] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Omega_j = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (H_j P_{j/j-1} H_j^T - H_{j-1} P_{j-1} \Phi_{j/j-1}^T H_j^T - H_j \Phi_{j/j-1} P_{j-1} H_{j-1}^T + H_{j-1} P_{j-1} H_{j-1}^T) + R_k \quad (23)$$

由此可知, $\hat{R}_k$ 是有偏的, 即 $E[\hat{R}_k] \neq R_k$, 进而引入次优无偏 MAP 估值器 $\hat{R}_k$ 为

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\varepsilon_j \varepsilon_j^T - (\Omega_j - R_j)] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\varepsilon_j \varepsilon_j^T - (H_j P_{j/j-1} H_j^T - H_{j-1} P_{j-1} \Phi_{j/j-1}^T H_j^T - H_j \Phi_{j/j-1} P_{j-1} H_{j-1}^T + H_{j-1} P_{j-1} H_{j-1}^T)] \quad (24)$$

同理, 有

$$E[\hat{Q}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_j E[\varepsilon_j \varepsilon_j^T] K_j^T = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\Phi_{j/j-1} P_{j-1} \Phi_{j/j-1}^T - P_j) + Q_k \quad (25)$$

因而 $\hat{Q}_k$ 是有偏的, Q_k 的次优无偏 MAP 估值器为

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (K_j \varepsilon_j \varepsilon_j^T K_j^T + P_j - \Phi_{j/j-1} P_{j-1} \Phi_{j/j-1}^T) \quad (26)$$

2.4 次优无偏自适应增量递推算法

为了便于工程计算, 下面进一步给出上述方法的递推形式, 即次优无偏递推 MAP 噪声统计估值器为

$$\hat{q}_k = (1 - \frac{1}{k}) \hat{q}_{k-1} + \frac{1}{k} (\hat{X}_k - \Phi_{k/k-1} \hat{X}_{k-1}) \quad (27)$$

$$\hat{Q}_k = (1 - \frac{1}{k}) \hat{Q}_{k-1} + \frac{1}{k} (K_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T K_k^T + P_k - \Phi_{k/k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T) \quad (28)$$

$$\hat{r}_k = (1 - \frac{1}{k}) \hat{r}_{k-1} +$$

$$\frac{1}{k} [\Delta Z_k - (H_k \hat{X}_{k/k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1})] \quad (29)$$

$$\hat{R}_k = (1 - \frac{1}{k}) \hat{R}_{k-1} + \frac{1}{k} [\varepsilon_k \varepsilon_k^T - (H_k P_{k/k-1} H_k^T - H_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T - H_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T + H_{k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T)] \quad (30)$$

式中

$$\varepsilon_k = \Delta Z_k - (H_k \hat{X}_{k/k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1}) - \hat{r}_{k-1} \quad (31)$$

证明: 根据式(15)和式(17), 得

$$\hat{q}_k = \frac{k-1}{k} \frac{1}{k-1} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (\hat{X}_j - \Phi_{j/j-1} \hat{X}_{j-1}) + (\hat{X}_k - \Phi_{k/k-1} \hat{X}_{k-1}) \right] = (1 - \frac{1}{k}) \hat{q}_{k-1} + \frac{1}{k} (\hat{X}_k - \Phi_{k/k-1} \hat{X}_{k-1}) \quad (32)$$

$$\hat{r}_k =$$

$$\frac{k-1}{k} \frac{1}{k-1} \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} [\Delta Z_j - (H_j \hat{X}_{j/j-1} - H_{j-1} \hat{X}_{j-1})] + [\Delta Z_k - (H_k \hat{X}_{k/k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1})] \right\} = (1 - \frac{1}{k}) \hat{r}_{k-1} + \frac{1}{k} [\Delta Z_k - (H_k \hat{X}_{k/k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1})] \quad (33)$$

由此可知, 递推公式(27)和公式(29)成立. 同理, 可将式(16)和式(18)写成递推形式(28)和式

(30).

3 自适应增量遗忘因子算法

当噪声统计量为未知时变时,时变噪声统计估值器为

$$\hat{q}_k = (1 - d_{k-1})\hat{q}_{k-1} + d_{k-1}(\hat{X}_k - \Phi_{k/k-1}\hat{X}_{k-1}) \quad (34)$$

$$\hat{Q}_k = (1 - d_{k-1})\hat{Q}_{k-1} + d_{k-1}(K_k \epsilon_k \epsilon_k^T K_k^T + P_k - \Phi_{k/k-1}P_{k-1}\Phi_{k/k-1}^T) \quad (35)$$

$$\hat{r}_k = (1 - d_{k-1})\hat{r}_{k-1} + d_{k-1}[\Delta Z_k - (H_k \hat{X}_{k/k-1} - H_{k-1} \hat{X}_{k-1})] \quad (36)$$

$$\hat{R}_k = (1 - d_{k-1})\hat{R}_{k-1} + d_{k-1}[\epsilon_k \epsilon_k^T - (H_k P_{k/k-1} H_k^T - H_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T H_k^T - H_k \Phi_{k/k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T + H_{k-1} P_{k-1} H_{k-1}^T)] \quad (37)$$

式中 $d_{k-1} = (1 - b)/(1 - b^k)$, $0 < b < 1$ 为遗忘因子.

4 仿真结果对比

设一维系统

$$x_k = 0.9x_{k-1} + w_{k-1} \quad (38)$$

$$z_k = x_k + a_k + v_k \quad (39)$$

式中 w_k 和 v_k 是独立的高斯白噪声序列,且系统噪声 w_k 的均值 $q=0.5$ 和方差 $Q=0.001$. 量测系统误差 $a_k=3$. 量测噪声 v_k 的均值 $r=0$, 方差 $R(R^*=1)$ 由下式给出

$$R_k = \begin{cases} R^* & k \in [1, 200) \\ 9R^* & k \in [200, 400) \\ R^* & k \in [400, 600) \\ 16R^* & k \in [600, 800) \\ R^* & k \in [800, 1000) \end{cases} \quad (40)$$

分别采用自适应 Kalman 滤波、自适应增量 Kalman 滤波两种方法(遗忘因子取 $b=0.95$)进行滤波(取初值 $\hat{x}_k = x_0 = 10$, $P_0 = 1$, $R_0 = 1$),图 1 给出其滤波结果与真值比较,从图 1 可以看到,自适应增量 Kalman 滤波与真值吻合得较好,能够消除系统误差对其的影响;自适应 Kalman 滤波不能消除未知的系统误差影响,与真值偏差较大.图 2 给出两种滤波结果与真值的误差比较,从图 2 可以进一步看到,自适应增量 Kalman 滤波与真值的误差在 0 附近波动较小,满足精度要求;而自适应 Kalman 滤波与真值的误差已不在 0 附近波动,误差较大.这表明自适应增量 Kalman 滤波能有效地消除未知的系统误差的影响,提高滤

波的精度,很好地跟踪状态 x_k 的变化.

从图 2 中可以看出,当在 $[200, 400)$ 和 $[600, 800)$ 这两个区间内,当协方差阵 R 从 R^* 变为其 9 倍和 16 倍时,自适应增量 Kalman 滤波方法能够比自适应 Kalman 滤波方法具有更强的自适应能力,可进一步提高滤波精度.

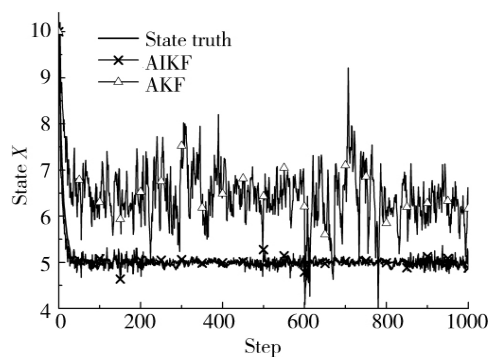


图 1 AIKF 与 AKF 状态估计结果与真值比较

Fig. 1 State estimation of AIKF and AKF with truth

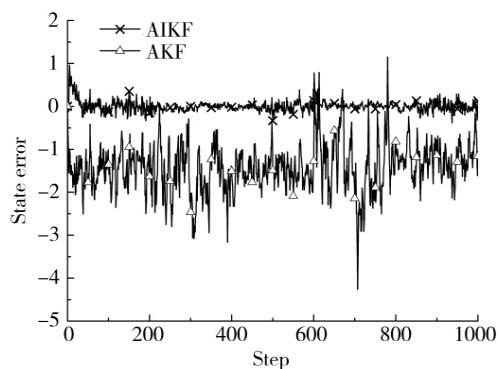


图 2 AIKF 与 AKF 的状态误差比较

Fig. 2 State error of AIKF and AKF

5 结 论

1) 针对工程中系统噪声和量测噪声的统计量事先未知的情况,提出一种自适应增量 Kalman 滤波方法,它可以实时估计和修正系统噪声和量测噪声统计量,达到降低模型误差,提高滤波精度的目的.

2) 由于环境因素的影响、测量设备的不稳定性等原因,常常造成测量数据含有系统误差.自适应增量 Kalman 滤波方法能成功消除这类系统误差.而自适应 Kalman 滤波方法则无法很好地对未知的系统误差进行补偿和修正.

3)大量计算表明,本文方法比自适应 Kalman 滤波方法具有更强的自适应能力.

4)本文提出的次优无偏递推 MAP 噪声统计估值器和时变噪声统计估值器,不但能够实时地对系统噪声和量测噪声的均值和协方差阵进行估计,而且估计量具有无偏性.

5)次优无偏自适应增量递推算法和自适应增量遗忘因子算法可以进行递推计算,便于工程应用.

参考文献:

- [1] Grewal M S, Andrews A P. Kalman filtering, theory and practice using matlab [M]. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [2] Ding W, Wang J, Rizos C. Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS integration[J]. Journal of Navigation, 2007, 60(3): 517-529.
- [3] 邓自立. 自校正滤波理论及其应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003: 161-193.
- [4] Jwo D J, Weng T P. An adaptive sensor fusion method with applications in integrated navigation[J]. The Journal of Navigation, 2008, 61(4): 705-721.
- [5] 付梦印, 邓志红, 闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 108-120.
- [6] Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics[C]// Proceedings of Joint American Control Conference. Washington, DC: American Automatic Council, 1969: 760-769.
- [7] LI Shuang, PENG Yuming. Radio beacons/IMU integrated navigation for Mars entry [J]. Advances in Space Research, 2011, 47(7): 1265-1279.
- [8] YANG Yuanxi, XU Tianhe. An adaptive Kalman filter based on sage windowing weights and variance components[J]. The Journal of Navigation, 2003, 56(2): 231-240.
- [9] 吴富梅, 杨元喜. 一种两步自适应抗差 Kalman 滤波在 GPS/INS 组合导航中的应用[J]. 测绘学报, 2010, 39(5): 522-527.
- WU Fumei, YANG Yuanxi. A new two-step adaptive robust Kalman filtering in GPS/INS integrated navigation system[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2010, 39(5): 522-527. (in Chinese)
- [10] GAO Shesheng, ZHONG Yongmin. Robust adaptive filtering method for SINS/SAR integrated navigation system [J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(6): 425-430.
- [11] 傅惠民, 吴云章, 娄泰山. 欠观测条件下的增量 Kalman 滤波方法[J]. 机械强度, 2012, 34(1): 43-47.
- FU Huimin, WU Yunzhang, LOU Taishan. Incremental Kalman filter method under poor observation condition [J]. Journal of Mechanical Strength, 2012, 34(1): 43-47. (in Chinese)
- [12] 傅惠民, 娄泰山, 吴云章. 欠观测条件下的扩展增量 Kalman 滤波方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(4): 777-781.
- FU Huimin, LOU Taishan, WU Yunzhang. Extended Incremental Kalman filter method under poor observation condition[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(4): 777-781. (in Chinese)
- [13] 傅惠民, 吴琼. 线性独立增量过程分析方法[J]. 航空动力学报, 2010, 25(4): 930-935.
- FU Huimin, WU Qiong. Analysis method for linear process with independent increments[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(4): 930-935. (in Chinese)